COGNOME: ______________________ NOME: _____________________V sez. LSP DATA: 5 marzo 2026

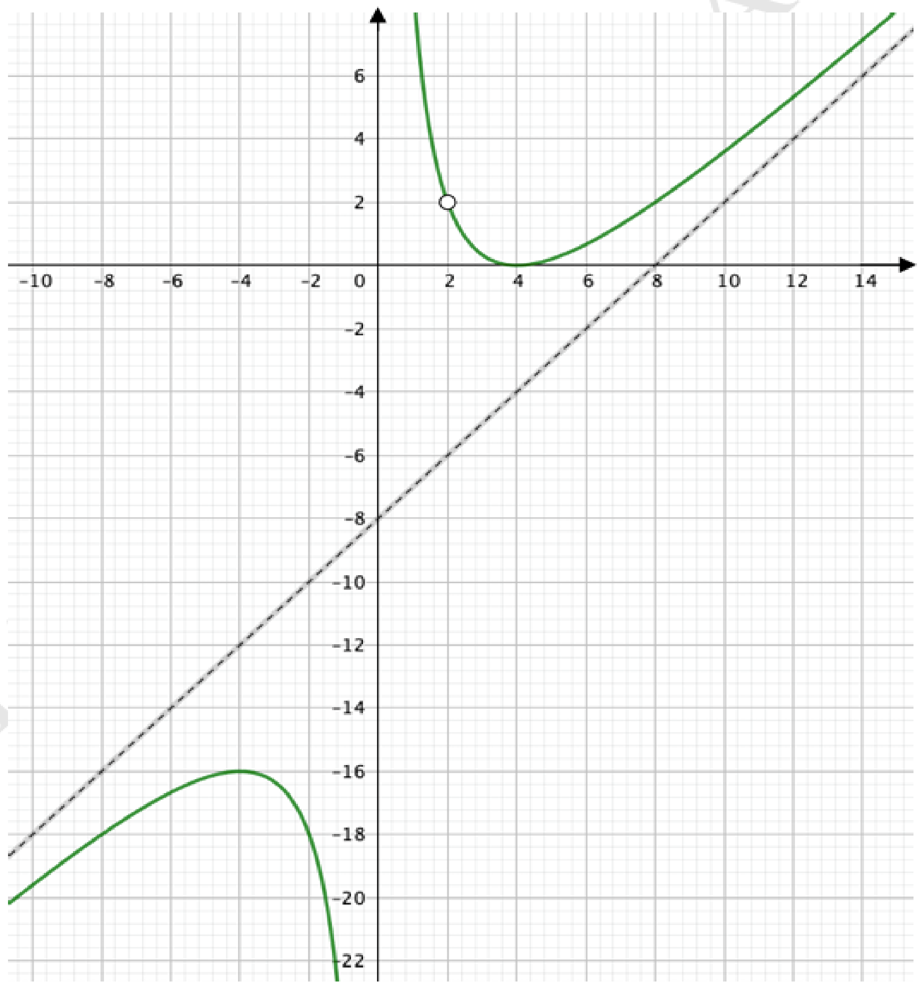
SIMULAZIONE SECONDA PROVA ESAME DI MATURITA' DI LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo: SPORTIVO
Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri il grafico γ in figura, rappresentativo di una funzione $f(x) = A(x)B(x)$ sono dei polinomi, definita nel dominio $D = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2, +\infty)$.



a) Analizzando il grafico, si deducano lo zero, l'insieme immagine e gli estremi relativi di f. Determinare i valori dei limiti agli estremi del dominio e i valori di $\frac{f(x)}{x}$ e $[f(x) - x]$. Scrivere le equazioni degli asintoti di f.

b) Supponendo che la funzione f abbia equazione

$$y = \frac{a(x-4)^2(x-c)}{x(x-d)}$$

determinare i valori dei parametri a, c, d.

c) Stabilito che i valori richiesti sono a = 1, c = 2, d = 2, dal grafico γ, dedurre i grafici delle funzioni $f(|x|)$ e $|f(x)|$ specificando, per ciascuna, dominio, asintoti, estremi e insieme immagine. Rappresentare $f(|x|)$ e $|f(x)|$ su due sistemi di riferimento cartesiano diversi.

d) Dati i punti:
- A di intersezione tra $f(x)$ e la retta di equazione $y = -16$;
- B di intersezione tra $f(x)$ e la retta di equazione $y = 2$, dove B è il punto di ascissa minore;
- C, D tra $f(|x|)$ e l'asse delle ascisse.

Determinare l'area del poligono ACBD.

PROBLEMA 2

È data la semicirconferenza Γ di centro C e diametro AB = 2. Sia t la semiretta tangente a Γ in B e giacente nello stesso semipiano di Γ rispetto ad AB.

a) Da un punto D di t, distinto da B, si conduca l'altra tangente a Γ e si indichi con E il punto di tangenza. Dal centro C si conduca una semiretta parallela a DE che tagli t in F. Si provi che il triangolo FDC è isoscele.

b) Posto x = DB e y = DF e si provi che:

$$y = \frac{x^2+1}{2x}$$

Si determini l'intervallo in cui può variare x, e in corrispondenza, quello in cui varia y.

c) Si studi la funzione y = *f(x)* e se ne tracci il grafico, senza tener conto dei limiti del problema geometrico.

d) Dati i punti:
   - A e B, di intersezione tra l'asintoto obliquo e le rette di equazione $x = 1$ e $x = 2$;
   - C e D, di intersezione tra l'asse delle x e le rette di equazione $x = 1$ e $x = 2$.

   Determinare l'area del poligono ABCD.

QUESITI

1) In un sistema di riferimento cartesiano *Oxy,* l'equazione $xy = k$, con *k* parametro reale non nullo, rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. Si dimostri che le rette tangenti nei suoi vertici sono perpendicolari alle bisettrici dei quadranti del sistema di riferimento considerato.

2) Dato un triangolo ABC, sia M il punto medio del lato BC. Dimostrare che, se la lunghezza di AM è la metà di BC, allora ABC è un triangolo rettangolo.

3) Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{2\cos(x)}$$

4) Verificare che la funzione $y = \frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}$ è invertibile e determinare la funzione inversa.

5) Data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 2x + 1 & per\ x < 2 \\ x^2 + (k-1)x - 1 & per\ x \geq 2 \end{cases}$$
determinare, se possibile, k in modo che la funzione $f(x)$ e la sua derivata siano continue in tutto l'insieme di definizione.

6) In una semicirconferenza di diametro $\overline{\mathrm{AB}} = 2r$ inscrivere il triangolo ABD retto in D. Tracciare la bisettrice dell'angolo $\widehat{DAB}$. Tale bisettrice intersechi il segmento BD in E. Indicato con x l'angolo $\widehat{BAE}$, determinare il rapporto y, tra la lunghezza del segmento BE e la lunghezza del segmento BD:
$$y = \frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$$
Calcolare il rapporto y per x che tende a zero.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema

7) Si consideri la seguente equazione in x:

$$f(x) \ = \ (k-2)x^2 - (2k-1)x \ + (k+1) = 0$$

con k reale e k≠2.
Indicate con x_1e x_2 le sue soluzioni calcolare i limiti di $x_1 + x_2$ quando k→2, k→ $+\infty$, k→ $-\infty$.

8) Una funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$ dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascissa $0 \ e \ \frac{12}{5}$ e ha come asintoti le rette di equazione $x = 3, x = -3 \ e \ y = 5$. Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione f.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema

COGNOME: ____________________ NOME: ___________________ Classe V sez. LSP DATA: 4 maggio 2026

SIMULAZIONE SECONDA PROVA ESAME DI MATURITA' DI LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo: SPORTIVO
Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Considera la famiglia di funzioni $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f_a(x) = \frac{x + a}{1 + x^2}$$

dove a è un parametro reale.

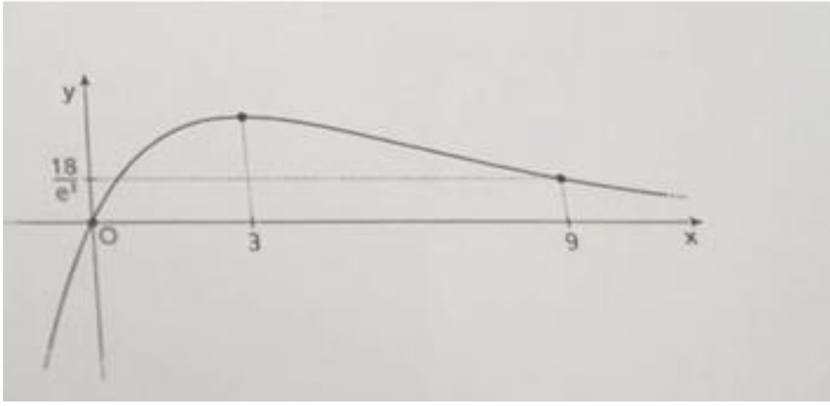
a) Dimostra che, per qualsiasi valore di a, il grafico di $f_a(x)$ presenta un punto di massimo relativo, un punto di minimo relativo e un solo asintoto.

b) Dimostra che, per qualsiasi valore di a, la retta tangente al grafico di $f_a(x)$ nel suo punto C di intersezione con l'asse y ha in comune con il grafico di $f_a(x)$ anche l'intersezione D con l'asse x. Determina per quale valore di $a > 0$ il segmento CD misura $2\sqrt{2}$.

c) Indica con $g(x)$ la funzione che si ottiene per il valore $a = 2$ trovato nel punto precedente.
Studia e rappresenta graficamente $g(x)$, limitandoti allo studio della derivata prima.

d) Trova per quale valore di a, nella famiglia delle funzioni $f_a(x)$ si ottiene la funzione $h(x)$ che ha il grafico simmetrico rispetto all'origine e verifica che $g(x) > h(x)\ \forall x$ del loro dominio.

PROBLEMA 2



Nella figura è rappresentato il grafico della funzione

$$f(x) = ax \cdot e^{-\frac{x}{b}}$$

che ha un massimo relativo in x=3.

a) Usa i dati in figura per determinare i valori dei parametri reali non nulli a e b.

b) Nel punto a) hai verificato che $a = 2$ e $b = 3$.
Calcola le coordinate del punto di flesso F della funzione $f(x)$.

c) Dal grafico della funzione $f(x)$ deduci il grafico qualitativo della funzione derivata prima $f'(x)$ spiegando il suo legame con il grafico della funzione $f(x)$.

d) Sia P un punto del grafico della funzione $f(x)$ di ascissa positiva, Dette A e B rispettivamente le proiezioni ortogonali del punto P sull'asse x e sull'asse y, determina le coordinate di P che rendono massima l'area del rettangolo $APBO$.

QUESITI

1) Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$f(x) = x \cdot e^{-x}$
negli eventuali punti di flesso.

2) Considera la funzione $f(x) = \frac{h}{x^2} - 2x$.
Determina per quale valore di h il grafico della sua primitiva $F(x)$ che passa per $P(1;0)$ ha un flesso nel punto di ascissa -1. Scrivi poi l'espressione di $F(x)$.

3) Su una semicirconferenza di diametro AB lungo 1 m, individua un punto C, in modo che, se D è il punto medio dell'arco $\widehat{BC}$, risulti massima la somma $\overline{AC} + \overline{DB}$. Indica l'angolo $\widehat{CAB}$ con $2x$.

4) Assegnata una funzione g, derivabile in $\mathbb{R}$ e tale che $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, determina l'equazione della retta normale alla curva $y = g(x)\, sin^2 x$ nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$.

5) Date la seguente funzione , individua e classifica i punti di discontinuità o di singolarità:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4^{-x} - 2} & se\ -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{\ln(6x+1)}{4x} & se\ x > 0 \end{cases}$$

6) E' dato un triangolo ABC di lati $AB = a$ e $BC = \sqrt{3a}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta ?
- se $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$, allora il triangolo è rettangolo.
- se il triangolo è rettangolo, allora $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$.

7) Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & se\ 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & se\ 1 < x \le 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0;2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

8) Secondo le neuroscienze, la mente umana è incapace di mantenere un livello alto di attenzione per un lungo periodo di tempo. In un modello semplificato, si può supporre che il grado di attenzione in funzione del tempo segue la legge:

$$g = e^{-\frac{(5t-1)^2}{4}} \qquad con\ 0 \leq t \leq 1,$$

dove g indica il grado di attenzione, in una scala da 0 a 1, e t il tempo trascorso in ore.

Secondo questo modello, dopo quanto tempo c'è il grado massimo di attenzione?

GRIGLIA DI VALUTAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA DI MATEMATICA

CANDIDATO ____

INDICATORI	DESCRITTORI	PUNTI	
Comprendere Analizzare la situazione problematica. Identificare i dati ed interpretarli. Effettuare gli eventuali collegamenti. Adottare i codici grafico-simbolici necessari.	Totale assenza di analisi ed interpretazione dei dati, rifiuto del confronto.	**0**	
	Esamina la situazione proposta in modo superficiale o frammentario. Formula ipotesi esplicative non adeguate. Non riconosce modelli, analogie o leggi.	**1**	
	Esamina la situazione proposta in modo parziale. Formula ipotesi esplicative non del tutto adeguate. Riconosce modelli o analogie o leggi in modo non sempre appropriato.	**2**	
	Esamina la situazione proposta in modo parziale. Formula ipotesi esplicative complessivamente adeguate.	**3**	
	Esamina la situazione proposta in modo quasi completo. Formula ipotesi esplicative complessivamente adeguate. Riconosce modelli o analogie o leggi in modo generalmente appropriato.	**4**	
	Esamina criticamente la situazione proposta in modo completo ed esauriente. Formula ipotesi esplicative adeguate. Riconosce modelli o analogie o leggi in modo appropriato.	**5**	
Individuare Conoscere i concetti matematici utili alla soluzione. Analizzare possibili strategie risolutive ed individuare la strategia più adatta.	Totale assenza di conoscenze matematiche, rifiuto del confronto.	**0**	
	Non conosce o conosce solo parzialmente i concetti matematici utili alla soluzione della prova, non è in grado di individuare relazioni tra le variabili in gioco e non riesce a individuare gli strumenti formali opportuni.	**1**	
	Conosce solo parzialmente i concetti matematici utili alla soluzione della prova o non imposta correttamente il procedimento risolutivo. Individua con difficoltà o errori gli strumenti formali opportuni.	**2**	
	Conosce superficialmente i concetti matematici utili alla soluzione della prova e individua le relazioni fondamentali tra le variabili. Non riesce a impostare correttamente tutto il procedimento risolutivo.	**3**	
	Conosce i concetti matematici utili alla soluzione della prova e le possibili relazioni tra le variabili. Individua gran parte delle strategie risolutive, anche se non sempre le più adeguate ed efficienti.	**4**	
	Conosce i concetti matematici utili alla soluzione della prova e tutte le relazioni tra le variabili, che utilizza in modo adeguato. Individua le strategie risolutive, anche se non sempre le più efficienti. Individua gli strumenti di lavoro formali opportuni.	**5**	
	Conosce e padroneggia i concetti matematici utili alla soluzione della prova, formula congetture, effettua chiari collegamenti logici e utilizza nel modo migliore le relazioni matematiche note. Individua strategie di lavoro adeguate ed efficienti e procedure risolutive anche non standard.	**6**	
Sviluppare il processo risolutivo Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.	Totale assenza di formalizzazione, rifiuto del confronto.	**0**	
	Formalizza le situazioni problematiche in modo inadeguato. Non applica correttamente gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la soluzione.	**1**	
	Formalizza le situazioni problematiche in modo superficiale. Non applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione.	**2**	
	Formalizza le situazioni problematiche in modo parziale. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo non sempre corretto	**3**	
	Formalizza le situazioni problematiche in modo quasi completo. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo generalmente corretto	**4**	
	Formalizza le situazioni problematiche in modo completo ed esauriente. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo ottimale	**5**	
Argomentare Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia risolutiva, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati al contesto del problema.	Totale mancanza di argomentazione, rifiuto del confronto.	**0**	
	Descrive il processo risolutivo in modo superficiale. Comunica con un linguaggio non appropriato. Non valuta la coerenza con la situazione problematica proposta.	**1**	
	Descrive il processo risolutivo in modo parziale. Comunica con un linguaggio non sempre appropriato. Valuta solo in parte la coerenza con la situazione problematica proposta.	**2**	
	Descrive il processo risolutivo in modo quasi completo. Comunica con un linguaggio generalmente appropriato. Valuta nel complesso la coerenza con la situazione problematica proposta.	**3**	
	Descrive il processo risolutivo in modo completo ed esauriente. Comunica con un linguaggio appropriato. Valuta in modo ottimale la coerenza con la situazione problematica proposta.	**4**	

PUNTEGGIO ………. /20

Tabella di conversione dal punteggio in ventesimi al voto

VENTESIMI	0-1	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
VOTO	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10